第 62 卷　第 2 期　　中山大学学报（自然科学版）（中英文）　　Vol. 62　No. 2
2023 年　3 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Mar.　2023

DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2022A005

# 分数阶趋化模型自相似解的整体存在性和渐近稳定性*

蔡中博，赵继红，罗永轲

宝鸡文理学院数学与信息科学学院，陕西 宝鸡 721013

**摘　要：** 主要考虑了一类分数阶趋化模型，是生物学中描述趋化现象的Keller-Segel模型的推广模型。基于热半群在伪测度空间中的线性和非线性估计，建立了该模型自相似解的整体存在性和唯一性。还利用Lebesgue控制收敛定理建立了该模型自相似解当时间趋于无穷时的渐近稳定性。

**关键词：** 分数阶趋化模型；伪测度空间；自相似解；渐近稳定性

**中图分类号：** O175.21　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 2097－0137（2023）02－0181－08

## Global existence and asymptotic stability of self-similar solutions for the fractional chemotaxis model

*CAI Zhongbo, ZHAO Jihong, LUO Yongke*

*School of Mathematics and Information Science, Baoji University Arts and Sciences, Baoji 721013, China*

**Abstract:** A class of fractional chemotaxis model is concerned, which is a generalized model of the Keller-Segel equations arising from biology in describing chemotaxis phenomenon. Based on the linear and nonlinear estimates of the heat semi-group in the pseudo-measure space, the global existence and uniqueness of self-similar solutions are established. Moreover, by applying the Lebesgue dominated convergence theorem, the asymptotic stability of self-similar solutions are also established as time tends to infinity.

**Key words:** fractional chemotaxis model; pseudo-measure space; self-similar solutions; asymptotic stability

本文主要考虑如下的分数阶趋化模型：

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = \nabla \cdot (u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} v = u, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ (u, v)\big|_{t=0} = (u_0, v_0), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{1}$$

* **收稿日期：** 2022－01－10　　**录用日期：** 2022－02－21　　**网络首发日期：** 2022－12－30
**基金项目：** 国家自然科学基金（11961030）；陕西省教育厅自然科学类专项科研计划（21JK0479）；陕西省自然科学基础研究计划（2022JM-034）；宝鸡文理学院创新科研项目（YJSCX22YB28）
**作者简介：** 蔡中博（1996年生），男；**研究方向：** 偏微分方程；E-mail：rebirthzbcai@163.com
**通信作者：** 赵继红（1982年生），男；**研究方向：** 偏微分方程；E-mail：jihzhao@163.com

其中$\alpha,\beta\in(1,2]$，$u=u(x,t)$和$v=v(x,t)$是未知函数，分数阶Laplace算子$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$可以通过Fourier变换定义如下：

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)=\mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{\alpha}\mathcal{F}u(\xi)\right),\ \forall u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

其中$\mathcal{F}$和$\mathcal{F}^{-1}$分别表示Fourier变换和Fourier逆变换，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$为速降函数空间。

当$\alpha=\beta=2$时，系统(1)即为生物学中经典的Keller-Segel模型的简化情形，该模型由Keller et al.(1970)首次提出，主要用于刻画细胞在其自身分泌化学物质作用下所产生的趋化现象。有关整体解的存在唯一性和局部解在有限时间爆破的研究结果读者可见Horstmann(2003;2004)的综述性文献。

当$\beta=2$时，系统(1)约化为以下分数阶趋化模型：

$$\begin{cases}\partial_t u+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u=\nabla\cdot(u\nabla v), & x\in\mathbb{R}^d, t>0,\\ -\Delta v=u, & x\in\mathbb{R}^d, t>0,\\ (u,v)\big|_{t=0}=(u_0,v_0), & x\in\mathbb{R}^d.\end{cases}\tag{2}$$

该模型由Escudero(2006)提出，主要用于描述Lévy飞行的随机游走细胞密度函数的时空分布，并且在一维情形下，作者还证明了当$1<\alpha\leqslant 2$时，系统(2)的解是整体存在的。随后Biler et al.(2010)证明了当$1<\alpha<2$时，系统(2)在临界Lebesgue空间$L^{\frac{d}{\alpha}}(\mathbb{R}^d)$中小初值问题的整体适定性，并证明了当初始质量大于某个阈值时，其对应的解会在有限时间发生爆破。最近，Zhao(2018)证明了当$1<\alpha\leqslant 2$时，系统(2)在临界Besov空间$\dot{B}^{-\alpha+\frac{d}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^d)\left(1\leqslant p<+\infty,1\leqslant q\leqslant+\infty\right)$和$\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,1}(\mathbb{R}^d)$中小初值问题的整体适定性。特别地，作者还证明了当$\alpha=1$时，系统(2)在临界Besov空间$\dot{B}^{-1+\frac{d}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\left(1\leqslant p<+\infty\right)$和$\dot{B}^{-1}_{\infty,1}(\mathbb{R}^d)$中小初值问题的整体存在性。更多关于系统(2)解的局部和整体适定性的结果参见文献(Sugiyama et al.,2015;Chen,2018;Shi,2019;Suguro,2021)。

注意到系统(1)满足如下的Scaling不变性：令

$$u_\lambda(x,t):=\lambda^{\alpha+\beta-2}u(\lambda x,\lambda^{\alpha}t),\qquad v_\lambda(x,t):=\lambda^{\alpha-2}v(\lambda x,\lambda^{\beta}t).$$

则易验证若$u$是系统(1)对应于初值$u_0$的解（$v$由$u$所确定），对任意$\lambda>0$，$u_\lambda$是系统(1)对应于初值$u_{0\lambda}$的解（$v_\lambda$由$u_\lambda$所确定），其中$u_{0\lambda}(x):=\lambda^{\alpha+\beta-2}u_0(\lambda x)$. 如果对任意$\lambda>0$，有$u_\lambda(x,t)=u(x,t)$对所有的$x\in\mathbb{R}^d$，$t\geqslant 0$成立，则称解$u$为系统(1)的自相似解。进一步，若$u$是系统(1)的自相似解，则其对应的初值需满足$u_0(\lambda x):=\lambda^{2-\alpha-\beta}u_0(x)$，即$u_0$是度数为$2-\alpha-\beta$的齐次函数。由于此类函数在$x=0$处的强奇性和$|x|\to+\infty$时的弱衰减，它们不属于任何的Lebesgue空间和Sobolev空间。另外，注意到$u_0\in \mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}(\mathbb{R}^d)$，其中$\mathrm{PM}^a(\mathbb{R}^d)$是伪测度空间，所以伪测度空间是包含此类奇性函数最自然的函数空间。有关伪测度空间上一些偏微分方程的理论研究参见文献(Biler et al.,2004;Cannone et al.,2004;Zhao et al.,2011;Liu et al.,2012)。

为叙述本文的主要结果，先介绍一些函数空间的概念。

**定义1** 设$a>0$，定义伪测度空间如下：

$$\mathrm{PM}^a(\mathbb{R}^d):=\left\{u\in S'(\mathbb{R}^d):\mathcal{F}(u)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d),\ \|u\|_{\mathrm{PM}^a}<+\infty\right\},$$

其中$\|u\|_{\mathrm{PM}^a}:=\operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^d}|\xi|^a|\mathcal{F}(u)(\xi)|$，$S'(\mathbb{R}^d)$表示缓增分布空间。

**定义2** 设$\sigma>0$，$\mathcal{X}$是Banach空间，定义函数空间

$$C_\sigma\left((0,+\infty),\mathcal{X}\right):=\left\{u:u\in\mathcal{C}_w\left([0,+\infty),\mathcal{X}\right),\text{且}t^\sigma u\in\mathcal{C}_w\left((0,+\infty),\mathcal{X}\right)\right\},$$

其上的范数定义为$\|u\|_{C_\sigma((0,+\infty),\mathcal{X})}:=\sup_{t>0}t^\sigma\|u\|_{\mathcal{X}}$，其中$\mathcal{C}_w\left((0,+\infty),\mathcal{X}\right)$表示在空间$\mathcal{X}$中有界且关于时间$t$弱连续的全体函数构成的函数空间。

**定义3** 设$\alpha,\beta\in(1,2]$，$d\geqslant 3$，记$I:=(d+2-\alpha-\beta,d+1-\beta)$.对于$a\in I$，定义函数空间

$$\mathcal{Y}:=\left\{u:u\in\mathcal{C}_w\left([0,+\infty),\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}(\mathbb{R}^d)\right)\cap C_\sigma\left((0,+\infty),\mathrm{PM}^a(\mathbb{R}^d)\right)\right\},$$

其中 $\sigma=\dfrac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}$，且其上的范数定义为 $\|u\|_{\mathcal{Y}}:=\sup\limits_{t>0}\|u\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}+\sup\limits_{t>0}t^{\sigma}\|u\|_{\mathrm{PM}^{a}}$. 分别用 $\|\cdot\|_{\mathcal{Y},1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Y},2}$ 简记 $\|u\|_{\mathcal{Y},1}:=\sup\limits_{t>0}\|u\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}$，$\|u\|_{\mathcal{Y},2}:=\sup\limits_{t>0}t^{\sigma}\|u\|_{\mathrm{PM}^{a}}$.

本文的主要结果如下：

**定理 1**　设 $\alpha,\beta\in(1,2]$, $d\geqslant 3$, $a\in I$，则对任意的 $u_0\in\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}(\mathbb{R}^d)$，存在常数 $\varepsilon$（$0<\varepsilon<\dfrac{1}{4\eta}$，其中 $\eta$ 是由式(8)所确定的一致常数），使得当 $\|u_0\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}\leqslant\varepsilon$ 时，系统(1)存在唯一的整体解 $u\in\mathcal{Y}$，且满足 $\|u\|_{\mathcal{Y}}\leqslant 2\eta\varepsilon$. 进一步，若 $u$ 和 $\tilde{u}$ 分别是系统(1)对应于初值 $u_0$ 和 $\tilde{u}_0$ 满足如下条件的两个解：

$$\|u_0\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}\leqslant\varepsilon,\qquad \|\tilde{u}_0\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}\leqslant\varepsilon,$$

则有

$$\|u-\tilde{u}\|_{\mathcal{Y}}\leqslant\frac{\eta}{1-4\varepsilon\eta^2}\|u_0-\tilde{u}_0\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}.$$

**推论 1**　在定理 1 的假设条件下，若初值 $u_0$ 还满足

$$u_{0\lambda}(x)=\lambda^{\alpha+\beta-2}u_0(\lambda x),$$

则由定理 1 得到的整体解 $u$ 是自相似解。

基于定理 1，利用分割区间技巧和 Lebesgue 控制收敛定理，可得如下自相似解的渐近稳定性。

**定理 2**　设初值 $u_0$ 和 $\tilde{u}_0$ 满足定理 1 中的条件，且进一步要求 $\varepsilon$ 还满足 $0<\varepsilon<\min\left\{\dfrac{1}{4\eta^2},\dfrac{1}{\tilde{\eta}}\right\}$（其中常数 $\eta$ 和 $\tilde{\eta}$ 是分别由式(8)和式(21)所确定的一致常数），再设 $u$ 和 $\tilde{u}$ 分别是系统(1)中对应于初值 $u_0$ 和 $\tilde{u}_0$ 的两个解，则下面的两个条件是等价的

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\left\|\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\left(u_0-\tilde{u}_0\right)\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}+t^{\frac{a+\alpha+\beta-2-d}{\alpha}}\left\|\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\left(u_0-\tilde{u}_0\right)\right\|_{\mathrm{PM}^{a}}\right)=0,\tag{3}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\|u-\tilde{u}\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}+t^{\frac{a+\alpha+\beta-2-d}{\alpha}}\|u-\tilde{u}\|_{\mathrm{PM}^{a}}\right)=0.\tag{4}$$

本文将利用伪测度空间上的广义热半群的线性和非线性估计来建立系统(1)在伪测度空间中自相似解的整体存在性和渐近稳定性。本文结构如下：第一部分首先建立系统(1)在伪测度空间中的线性和非线性估计，然后利用 Banach 不动点定理给出定理 1 的证明。第二部分将建立当时间趋于无穷时系统(1)的自相似解的渐近稳定性。贯穿全文，用 $A\lesssim B$ 表示 $A\leqslant CB$，其中 $C$ 表示与研究问题参量无关的一致常数。

## 1　定理 1 的证明

**引理 1**(Stein, 1970)　设 $0<\alpha,\beta<d$ 且 $0<\alpha+\beta<d$, 则

$$|x|^{\alpha-d}*|x|^{\beta-d}(y)=\int_{\mathbb{R}^d}|x|^{\alpha-d}|y-x|^{\beta-d}\mathrm{d}x\lesssim|y|^{\alpha+\beta-d}.$$

**引理 2**（Lemarié, 2002）设 $\mathcal{X}$ 是 Banach 空间，$B$：$\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ 是双线性映射，且对任意的 $u$，$v\in\mathcal{X}$，存在常数 $C$ 使得

$$\|B(u,v)\|_{\mathcal{X}}\leqslant C\|u\|_{\mathcal{X}}\|v\|_{\mathcal{X}},$$

则对任意 $y\in\mathcal{X}$，若 $\|y\|_{\mathcal{X}}\leqslant\eta<\dfrac{1}{4C}$，方程 $u=y+B(u,u)$ 存在唯一的解 $u\in\mathcal{X}$ 使得 $\|u\|_{\mathcal{X}}\leqslant 2\eta$.

先将系统(1)约化为等价的积分方程。由系统(1)的第二个方程可知：$v(x,t)=(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}u(x,t)$，并将其代入系统(1)的第一个方程，由 Duhamel 原理可将系统(1)约化为如下等价的积分方程

$$u=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}u_0+\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\nabla\cdot\left(u\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}u\right)\mathrm{d}\tau=S(t)u_0+B(u,u),\tag{5}$$

其中 $S(t)u_0:=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}u_0$, $B(u,v):=\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\nabla\cdot\left(u\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v\right)\mathrm{d}\tau$. 定义映射 F 如下：

$$\mathrm{F}(u)=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}u_0+\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\nabla\cdot\left(u\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}u\right)\mathrm{d}\tau.$$

下面证明映射F是良定义的，且是映空间$\mathcal{Y}$中某个充分小的闭球到自身的压缩映射。

**引理3** 设$u_0\in \mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}(\mathbb{R}^d)$，则$S(t)u_0\in\mathcal{Y}$，且有下面的线性估计成立：

$$\left\|S(t)u_0\right\|_{\mathcal{Y}}\lesssim\left\|u_0\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}.$$

**证明** 首先，利用空间$\mathcal{Y}$范数的定义得

$$\left\|S(t)u_0\right\|_{\mathcal{Y},1}\lesssim\sup_{t>0}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left|\xi\right|^{d+2-\alpha-\beta}\mathrm{e}^{-t|\xi|^\alpha}\left|\mathcal{F}\left(u_0\right)\right|\lesssim\left\|u_0\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}.$$

从而可知，$S(t)u_0\in L^\infty\left([0,+\infty),\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$. 其次，证明$S(t)u_0$关于$t$是弱连续的，根据$S(t)$的半群性质，只需证明$S(t)u_0$在$t=0$处是弱连续的。为此，对任意$\varphi\in S(\mathbb{R}^d)$，有

$$\left|\left\langle S(t)u_0-u_0,\varphi\right\rangle\right|=\left|\int_{\mathbb{R}^d}\left(\mathrm{e}^{-t|\xi|^\alpha}-1\right)\mathcal{F}\left(u_0\right)\mathcal{F}(\varphi)\mathrm{d}\xi\right|\leqslant t\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\frac{\left|\mathrm{e}^{-t|\xi|^\alpha}-1\right|}{t\left|\xi\right|^\alpha}\left\|\frac{\mathcal{F}(\varphi)}{\left|\xi\right|^{d+2-2\alpha-\beta}}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\right\}\left\|u_0\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}.$$

故当$t\to0^+$时$\left|\left\langle S(t)u_0-u_0,\varphi\right\rangle\right|\to0$，即证明了$S(t)u_0\in\mathcal{C}_w\left([0,+\infty),\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$.

最后，由$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\left(t|\xi|^\alpha\right)^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\mathrm{e}^{-t|\xi|^\alpha}\right\}=\mathrm{e}^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\cdot\left(\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}\right)^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}$，得

$$\begin{aligned}\left\|S(t)u_0\right\|_{\mathcal{Y},2}&=\sup_{t>0}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{t^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\mathrm{e}^{-t|\xi|^\alpha}\left|\xi\right|^a\left|\mathcal{F}\left(u_0\right)\right|\right\}\\&=\sup_{t>0}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\left(t|\xi|^\alpha\right)^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\mathrm{e}^{-t|\xi|^\alpha}\left|\xi\right|^{d+2-\alpha-\beta}\left|\mathcal{F}\left(u_0\right)\right|\right\}\lesssim\left\|u_0\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}.\end{aligned}$$

引理3得证。

**引理4** 设$u,v\in\mathcal{Y}$，则$B(u,v)\in\mathcal{Y}$，且有下面的双线性估计成立：

$$\left\|B(u,v)\right\|_{\mathcal{Y}}\lesssim\left\|u\right\|_{\mathcal{Y},2}\left\|v\right\|_{\mathcal{Y},2}.$$

**证明** 由引理1及$a\in I$知，$\left|\xi\right|^{-a}*\left|\xi\right|^{1-a-\beta}\sim\left|\xi\right|^{d+1-2a-\beta}$. 从而有

$$\begin{aligned}\left\|B(u,v)\right\|_{\mathcal{Y},1}&=\sup_{t>0}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\left|\xi\right|^{d+2-\alpha-\beta}\left|\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^\alpha}\mathrm{i}\xi\cdot\mathcal{F}\left(u\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v\right)(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|\right\}\\&\lesssim\sup_{t>0}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\int_0^t\left|\xi\right|^{d+3-\alpha-\beta}\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^\alpha}\left(\left|\xi\right|^{-a}*\left|\xi\right|^{1-a-\beta}\right)\tau^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\mathrm{d}\tau\right\}\left\|u\right\|_{\mathcal{Y},2}\left\|v\right\|_{\mathcal{Y},2}\\&\lesssim\sup_{t>0}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\int_0^t\left|\xi\right|^{2d+4-\alpha-2\beta-2a}\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^\alpha}\tau^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\mathrm{d}\tau\right\}\left\|u\right\|_{\mathcal{Y},2}\left\|v\right\|_{\mathcal{Y},2}\\&\lesssim\sup_{t>0}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\int_0^t\left((t-\tau)\left|\xi\right|^\alpha\right)^{\frac{2d+4-\alpha-2\beta-2a}{\alpha}}\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^\alpha}(t-\tau)^{-\frac{2d+4-\alpha-2\beta-2a}{\alpha}}\tau^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\mathrm{d}\tau\right\}\left\|u\right\|_{\mathcal{Y},2}\left\|v\right\|_{\mathcal{Y},2}\\&\lesssim\sup_{t>0}\left\{\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{2d+4-\alpha-2\beta-2a}{\alpha}}\tau^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\mathrm{d}\tau\right\}\left\|u\right\|_{\mathcal{Y},2}\left\|v\right\|_{\mathcal{Y},2}.\end{aligned}$$

令$\tau=ts$得

$$\left\|B(u,v)\right\|_{\mathcal{Y},1}\lesssim\int_0^1(1-s)^{-\frac{2d+4-\alpha-2\beta-2a}{\alpha}}s^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\mathrm{d}s\left\|u\right\|_{\mathcal{Y},2}\left\|v\right\|_{\mathcal{Y},2}\lesssim\left\|u\right\|_{\mathcal{Y},2}\left\|v\right\|_{\mathcal{Y},2}. \tag{6}$$

注意到当$a\in I$，且$\alpha,\beta\in(1,2]$，$d\geqslant3$时，式中$\int_0^1(1-s)^{-\frac{2d+4-\alpha-2\beta-2a}{\alpha}}s^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\mathrm{d}s$是可积的。

另外，由引理1得，对任意$a\in I$，

$$
\begin{aligned}
\left\|B(u,v)\right\|_{\mathrm{PM}^a} &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{|\xi|^a\left|\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^\alpha}\mathrm{i}\xi\cdot\mathcal{F}\left(u\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v\right)(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau\right|\right\}\\
&\lesssim \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\int_0^t |\xi|^{a+1}\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^\alpha}\left(|\xi|^{-a}*|\xi|^{1-a-\beta}\right)\tau^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\mathrm{d}\tau\right\}\|u\|_{\mathcal{Y},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2}\\
&\lesssim \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^\alpha}|\xi|^{d+2-\beta-a}\tau^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\mathrm{d}\tau\right\}\|u\|_{\mathcal{Y},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2}\\
&\lesssim \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\int_0^t \left((t-\tau)|\xi|^\alpha\right)^{\frac{d+2-\beta-a}{\alpha}}\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^\alpha}(t-\tau)^{-\frac{d+2-\beta-a}{\alpha}}\tau^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\mathrm{d}\tau\right\}\|u\|_{\mathcal{Y},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2}\\
&\lesssim \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{d+2-\beta-a}{\alpha}}\tau^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\mathrm{d}\tau\|u\|_{\mathcal{Y},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2}\\
&\lesssim t^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1-s)^{-\frac{d+2-\beta-a}{\alpha}}s^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\mathrm{d}s+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-s)^{-\frac{d+2-\beta-a}{\alpha}}s^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\mathrm{d}s\right)\|u\|_{\mathcal{Y},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2}\\
&\lesssim t^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u\|_{\mathcal{Y},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2}.
\end{aligned}\tag{7}
$$

结合式(6)与式(7)知，

$$B(u,v)\in L^\infty\left([0,\infty),\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}(\mathbb{R}^d)\right),\qquad t^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}B(u,v)\in L^\infty\left([0,+\infty),\ \mathrm{PM}^a(\mathbb{R}^d)\right),$$

且

$$\left\|B(u,v)\right\|_{\mathcal{Y}}\lesssim\|u\|_{\mathcal{Y},2}\|v\|_{\mathcal{Y},2}.$$

关于$B(u,v)$对时间$t$的弱连续性可用Cannone et al.(2004)的方法证明，此处略去。引理4得证。

由引理3和4可知映射F是良定义的，并存在常数$\eta>0$使得对任意$u\in\mathcal{Y}$，$\hat{u}\coloneqq \mathrm{F}(u)$有

$$\|\hat{u}\|_{\mathcal{Y}}\leqslant\eta\left(\left\|u_0\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}+\|u\|_{\mathcal{Y}}^2\right).\tag{8}$$

令$\varepsilon>0$充分小使得$4\eta^2\varepsilon<1$且$\left\|u_0\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}\leqslant\varepsilon$，得

$$\|\hat{u}\|_{\mathcal{Y}}\leqslant\eta\varepsilon+\eta\|u\|_{\mathcal{Y}}^2.$$

令B为空间$\mathcal{Y}$中半径为$2\eta\varepsilon$的闭球，即

$$\mathrm{B}\coloneqq\left\{u\in\mathcal{Y}:\|u\|_{\mathcal{Y}}\leqslant2\eta\varepsilon\right\},$$

则对于任意$u\in\mathcal{Y}$有

$$\|\hat{u}\|_{\mathcal{Y}}\leqslant\eta\varepsilon+\eta(2\eta\varepsilon)^2=\left(1+4\eta^2\varepsilon\right)\eta\varepsilon\leqslant2\eta\varepsilon,$$

所以F是映B到其自身的映射。

下证映射F是B上的压缩映射。设$u_1,u_2\in\mathrm{B}$，且$\mathrm{F}u_i=\hat{u}_i, i=1,2$，类似于引理3~4的推导可得

$$\left\|\hat{u}_1-\hat{u}_2\right\|_{\mathcal{Y}}\leqslant\eta\left(\left\|u_1\right\|_{\mathcal{Y}}+\left\|u_2\right\|_{\mathcal{Y}}\right)\left\|u_1-u_2\right\|_{\mathcal{Y}}\leqslant4\eta^2\varepsilon\left\|u_1-u_2\right\|_{\mathcal{Y}}.$$

由于$4\eta^2\varepsilon<1$，所以映射F是映B到自身的压缩映射。

由Banach不动点定理可知，系统(1)在空间$\mathcal{Y}$中存在满足条件$\|u\|_{\mathcal{Y}}\leqslant2\eta\varepsilon$的唯一整体解。进一步，若$u$和$\tilde{u}$分别是系统(1)对应初值$u_0$和$\tilde{u}_0$满足如下条件的解：

$$\left\|u_0\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}\leqslant\varepsilon,\qquad\left\|\tilde{u}_0\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}\leqslant\varepsilon,$$

则类似于引理3和引理4的推导可得

$$\|u-\tilde{u}\|_{\mathcal{Y}}\leqslant\eta\left\|u_0-\tilde{u}_0\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}+4\eta^2\varepsilon\|u-\tilde{u}\|_{\mathcal{Y}}.$$

由于$4\eta^2\varepsilon<1$，有

$$\|u-\tilde{u}\|_{\mathcal{Y}}\leqslant\frac{\eta}{1-4\varepsilon\eta^2}\left\|u_0-\tilde{u}_0\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}.$$

至此，我们完成了定理1的证明。

## 2 定理2的证明

设$u$和$\tilde{u}$分别表示由定理1所得的系统(1)对应于初值$u_0$和$\tilde{u}_0$的两个解，则由定理1可知

$$\|u\|_{\mathcal{Y}} \leqslant 2\eta\varepsilon, \qquad \|\tilde{u}\|_{\mathcal{Y}} \leqslant 2\eta\varepsilon. \tag{9}$$

再由式(5)可知

$$u - \tilde{u} = S(t)(u_0 - \tilde{u}_0) + B(u - \tilde{u}, u) + B(\tilde{u}, u - \tilde{u}). \tag{10}$$

引入辅助函数

$$p(t) \coloneqq \left\|S(t)\left(u_0 - \tilde{u}_0\right)\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}} + t^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\left\|S(t)\left(u_0 - \tilde{u}_0\right)\right\|_{\mathrm{PM}^{a}},$$

$$q(t) \coloneqq \|u - \tilde{u}\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}} + t^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u - \tilde{u}\|_{\mathrm{PM}^{a}}.$$

首先假设式(3)成立，由引理3得$p(t) \in L^{\infty}\left(\left[0, +\infty\right)\right)$且$\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = 0$. 为了证明式(4)，需要对$q(t)$进行估计。为此，先计算$u - \tilde{u}$的$\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}$范数。由式(10)可得

$$\|u - \tilde{u}\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}} \leqslant \left\|S(t)\left(u_0 - \tilde{u}_0\right)\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}} + \left\|B(u - \tilde{u}, u)\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}} + \left\|B(\tilde{u}, u - \tilde{u})\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}} \coloneqq \mathrm{J}_0 + \mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2.$$

为了估计$\mathrm{J}_i(i = 1, 2)$，令$\delta \in (0, 1)$为待定的常数，并将积分$\int_0^t \cdots \mathrm{d}\tau$分割成$\int_0^{\delta t} \cdots \mathrm{d}\tau + \int_{\delta t}^t \cdots \mathrm{d}\tau$，然后对分解项分别进行估计。对于$\mathrm{J}_1$，将其分解成下面两项

$$\mathrm{J}_1 = \left\|\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\nabla\cdot\left((u - \tilde{u})\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}u\right)\mathrm{d}\tau\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}$$

$$= \left\|\left(\int_0^{\delta t} + \int_{\delta t}^t\right)\mathrm{e}^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\nabla\cdot\left((u - \tilde{u})\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}u\right)\mathrm{d}\tau\right\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}} \coloneqq \mathrm{J}_{11} + \mathrm{J}_{12}.$$

利用引理1，对$\mathrm{J}_{11}$的估计如下

$$\mathrm{J}_{11} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{|\xi|^{d+2-\alpha-\beta}\left|\int_0^{\delta t}\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^{\alpha}}\mathrm{i}\xi\cdot\mathcal{F}\left((u - \tilde{u})\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}u\right)(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\tau\right|\right\}$$

$$\lesssim \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\int_0^t|\xi|^{d+3-\alpha-\beta}\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^{\alpha}}\left(|\xi|^{-a}*|\xi|^{1-a-\beta}\right)\tau^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|_{\mathrm{PM}^{a}}\mathrm{d}\tau\right\}\|u\|_{\mathcal{Y},2}$$

$$\lesssim \int_0^{\delta t}\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^{\alpha}}|\xi|^{2d+4-\alpha-2\beta-2a}\tau^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|_{\mathrm{PM}^{a}}\mathrm{d}\tau\|u\|_{\mathcal{Y},2}$$

$$\lesssim \eta\varepsilon\int_0^{\delta t}(t-\tau)^{-\frac{2d+4-\alpha-2\beta-2a}{\alpha}}\tau^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|_{\mathrm{PM}^{a}}\mathrm{d}\tau.$$

令$\tau = ts$得

$$\mathrm{J}_{11} \lesssim \eta\varepsilon\int_0^{\delta}(1-s)^{-\frac{2d+4-\alpha-2\beta-2a}{\alpha}}s^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\left[(ts)^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(ts) - \tilde{u}(ts)\|_{\mathrm{PM}^{a}}\right]\mathrm{d}s. \tag{11}$$

对$\mathrm{J}_{12}$，直接进行估计

$$\mathrm{J}_{12} \lesssim \eta\varepsilon\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\left(\tau^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|_{\mathrm{PM}^{a}}\right). \tag{12}$$

结合式(11)~(12)可得

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_1 \lesssim{}& \eta\varepsilon\int_0^{\delta}(1-s)^{-\frac{2d+4-\alpha-2\beta-2a}{\alpha}}s^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\left[(ts)^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(ts) - \tilde{u}(ts)\|_{\mathrm{PM}^{a}}\right]\mathrm{d}s\\ &+ \eta\varepsilon\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\left(\tau^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|_{\mathrm{PM}^{a}}\right).\end{aligned} \tag{13}$$

类似估计$\mathrm{J}_1$方法可推得$\mathrm{J}_2$的估计：

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_2 \lesssim{}& \eta\varepsilon\int_0^\delta(1-s)^{-\frac{2d+4-\alpha-2\beta-2a}{\alpha}}s^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\left[(ts)^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(ts)-\tilde{u}(ts)\|_{\mathrm{PM}^a}\right]\mathrm{d}s\\ &+\eta\varepsilon\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\left(\tau^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(\tau)-\tilde{u}(\tau)\|_{\mathrm{PM}^a}\right).\end{aligned}\tag{14}$$

接下来，我们估计$u-\tilde{u}$的$\mathrm{PM}^a$范数

$$\|u-\tilde{u}\|_{\mathrm{PM}^a}\leqslant\|S(t)(u_0-\tilde{u}_0)\|_{\mathrm{PM}^a}+\|B(u-\tilde{u},u)\|_{\mathrm{PM}^a}+\|B(\tilde{u},u-\tilde{u})\|_{\mathrm{PM}^a}\coloneqq\mathrm{K}_0+\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2.$$

对于$\mathrm{K}_1$，利用类似估计$\mathrm{J}_1$的方法，将其分解成下面两项，然后对分解项分别进行估计

$$\mathrm{K}_1=\left\|\left(\int_0^{\delta t}+\int_{\delta t}^t\right)\mathrm{e}^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\nabla\cdot\left((u-\tilde{u})\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}u\right)\mathrm{d}\tau\right\|_{\mathrm{PM}^a}\coloneqq\mathrm{K}_{11}+\mathrm{K}_{12}.$$

对$\mathrm{K}_{11}$，由引理1可得

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_{11}\lesssim{}&\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left|\int_0^t|\xi|^{a+1}\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^\alpha}\left(|\xi|^{-a}*|\xi|^{1-a-\beta}\right)\tau^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(\tau)-\tilde{u}(\tau)\|_{\mathrm{PM}^a}\mathrm{d}\tau\right|\|u\|_{\mathcal{Y},2}\\ \lesssim{}&\int_0^{\delta t}\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^\alpha}|\xi|^{d+2-\beta-a}\tau^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(\tau)-\tilde{u}(\tau)\|_{\mathrm{PM}^a}\mathrm{d}\tau\|u\|_{\mathcal{Y},2}\\ \lesssim{}&\eta\varepsilon\int_0^{\delta t}(t-\tau)^{-\frac{d+2-\beta-a}{\alpha}}\tau^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(ts)-\tilde{u}(ts)\|_{\mathrm{PM}^a}\mathrm{d}s\\ \lesssim{}&\eta\varepsilon t^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\int_0^\delta(1-s)^{-\frac{d+2-\beta-a}{\alpha}}s^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\left[(ts)^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(ts)-\tilde{u}(ts)\|_{\mathrm{PM}^a}\right]\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{15}$$

对$\mathrm{K}_{12}$直接进行估计

$$\mathrm{K}_{12}\lesssim\eta\varepsilon t^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\left(\tau^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(\tau)-\tilde{u}(\tau)\|_{\mathrm{PM}^a}\right).\tag{16}$$

结合式(15)~(16)可得

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_1\lesssim{}&\eta\varepsilon t^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\int_0^\delta(1-s)^{-\frac{d+2-\beta-a}{\alpha}}s^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\left[(ts)^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(ts)-\tilde{u}(ts)\|_{\mathrm{PM}^a}\right]\mathrm{d}s\\ &+\eta\varepsilon t^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\left(\tau^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(\tau)-\tilde{u}(\tau)\|_{\mathrm{PM}^a}\right).\end{aligned}\tag{17}$$

同理，可推得$\mathrm{K}_2$的估计如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_2\lesssim{}&\eta\varepsilon t^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\int_0^\delta(1-s)^{-\frac{d+2-\beta-a}{\alpha}}s^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\left[(ts)^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(ts)-\tilde{u}(ts)\|_{\mathrm{PM}^a}\right]\mathrm{d}s\\ &+\eta\varepsilon t^{-\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\left(\tau^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(\tau)-\tilde{u}(\tau)\|_{\mathrm{PM}^a}\right).\end{aligned}\tag{18}$$

结合式(13)~(14),(17)~(18),有

$$\begin{aligned}\|u-\tilde{u}\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}+t^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u-\tilde{u}\|_{\mathrm{PM}^a}\lesssim{}&\|S(t)(u_0-\tilde{u}_0)\|_{\mathrm{PM}^{d+2-\alpha-\beta}}+t^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|S(t)(u_0-\tilde{u}_0)\|_{\mathrm{PM}^a}\\ &+\eta\varepsilon\int_0^\delta(1-s)^{-\frac{2d+4-\alpha-2\beta-2a}{\alpha}}s^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\left[(ts)^\sigma\|u(ts)-\tilde{u}(ts)\|_{\mathrm{PM}^a}\right]\mathrm{d}s\\ &+\eta\varepsilon\int_0^\delta(1-s)^{-\frac{d+2-\beta-a}{\alpha}}s^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}}\left[(ts)^\sigma\|u(ts)-\tilde{u}(ts)\|_{\mathrm{PM}^a}\right]\mathrm{d}s\\ &+\eta\varepsilon\sup_{\delta t\leqslant\tau\leqslant t}\left(\tau^{\frac{a+\alpha+\beta-d-2}{\alpha}}\|u(\tau)-\tilde{u}(\tau)\|_{\mathrm{PM}^a}\right).\end{aligned}\tag{19}$$

令

$$M\coloneqq\limsup_{t\to+\infty}q(t)=\lim_{\substack{k\in\mathrm{N}\\k\to+\infty}}\sup_{t\geqslant k}q(t).$$

要证式(4)成立，只需证明$M=0$. 由式(9)可知$M$是有限非负的，从而对式(19)应用Lebesgue控制收敛定理并结合假设式(3)可得

$$M\lesssim\eta\varepsilon\left(F(\delta)+1\right)M,\tag{20}$$

其中

$$F(\delta) := \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{2d+4-\alpha-2\beta-2a}{\alpha}} s^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}} \mathrm{d}s + \int_0^\delta (1-s)^{-\frac{d+2-\beta-a}{\alpha}} s^{-\frac{2(a+\alpha+\beta-d-2)}{\alpha}} \mathrm{d}s.$$

由式(20)可知，存在常数$\tilde{\eta}$使得

$$M \leqslant \tilde{\eta}\varepsilon\big(F(\delta)+1\big)M. \tag{21}$$

由假设条件$\tilde{\eta}\varepsilon < 1$，从而可选取$\delta$充分小使得$\tilde{\eta}\varepsilon\big(F(\delta)+1\big) < 1$，由此可知$M = 0$，即式(4)成立。

反之，若式(4)成立，要证明式(3)成立。利用假设式(4)和引理3可知

$$q(t) \in L^\infty\big([0, +\infty)\big), \qquad \lim_{t\to+\infty} q(t) = 0.$$

重复上述式(19)的证明过程可推得

$$p(t) \lesssim \tilde{\eta}\varepsilon\big(F(\delta)+1\big)q(t). \tag{22}$$

因为$\tilde{\eta}\varepsilon\big(F(\delta)+1\big)$有界且与时间$t$无关，则由式(4)和式(22)即得式(3)成立。 证毕

## 参考文献：


BILER P, CANNONE M, 2004. Global regular and singular solutions for a model of gravitating particles[J]. Math Ann, 330(4): 693-708.

BILER P, KARCH G, 2010. Blowup of solutions to generalized Keller-Segel model[J]. J Evol Equ, 10(2): 247-262.

CANNONE M, KARCH G, 2004. Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system?[J]. J Differential Equations, 197(2): 247-274.

CHEN X, 2018. Well-posedness of the Keller-Segel system in Fourier-Besov-Morrey spaces[J]. Z Anal Anwend, 37(4): 417-433.

ESCUDERO C, 2006. The fractional Keller-Segel model[J]. Nonlinearity, 19(12): 2909-2918.

HORSTMANN D, 2003. From 1970 until present: The Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences I[J]. Jahresber Deutsch Math Verein, 105(3): 103-165.

HORSTMANN D, 2004. From 1970 until present: The Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences II[J]. Jahresber Deutsch Math Verein, 106(2): 51-69.

KELLER E F, SEGEL L A, 1970. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability[J]. J Theor Biol, 26(3): 399-415.

LEMARIÉ P G, 2002. Recent developments in the Navier-Stokes problem[M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

LIU Q, ZHAO J, CUI S, 2012. Existence and regularizing rate estimates of solutions to a generalized magneto-hydrodynamic system in pseudomeasure spaces[J]. Ann Mat Pura Appl, 191(2): 293-309.

SHI R K, 2019. Global existence of solutions to the Keller-Segel system with initial data large mass[J]. Chin Quart J Math, 34: 352-361.

STEIN E M, 1970. Singular integrals and differentiability properties of functions[M]. Princeton: Princeton University Press.

SUGIYAMA Y, YAMAMOTO M, KATO K, 2015. Local and global solvability and blow up for the drift-diffusion equation with the fractional dissipation in the critical space[J]. J Differential Equations, 258(9): 2983-3010.

SUGURO T, 2021. Well-posedness and unconditional uniqueness of mild solutions to the Keller-Segel system in uniformly local spaces[J]. J Evol Equ, 21(4): 4599-4618.

ZHAO J, 2018. Well-posedness and Gevrey analyticity of the generalized Keller-Segel system in critical Besov spaces[J]. Ann Mat Pura Appl, 197(2): 521-548.

ZHAO J, DENG C, CUI S, 2011. Global existence and asymptotic behavior of self-similar solutions for the Navier-Stokes-Nernst-Planck-Poisson system in $\mathbb{R}^3$[J]. Int J Differ Equ, 329014.


（责任编辑 冯兆永）